Cálculo de um integral definido envolvendo $\arcsin\sqrt{x}$ no numerador e um polinómio quártico no denominador

Questão `math.stackexchange.com/q/683454/752`, em `math.stackexchange.com` e minha resposta `math.stackexchange.com/a/686312/752`.

Q. Determinação de

$$I=\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^4-2x^3+2x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

R. A forma como, a partir de I, obteve o integral

$$2I=\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{x^4-2x^3+2x^2-x+1}dx$$

é um passo importante para achar a solução. Usando a substituição $u=x-1/2$ consegui desenvolver o integrando em duas fracções parciais cujo denominador é um polinómio quadrático. Seja

$$J=2I=\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{x^4-2x^3+2x^2-x+1}dx \tag{1}$$

Para $0\leq x\leq 1$ tem-se

$$\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Assim

$$\begin{aligned}J&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^4-2x^3+2x^2-x+1}dx\\&=8\pi\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{x^4-2x^3+2x^2-x+1}dx, \qquad u=x-\frac{1}{2}\\&=16\pi\int_0^{1/2}\frac{1}{16u^2+8u^2+13}du\end{aligned} \tag{3}$$

O polinómio do denominador pode factorizar-se como segue

$$\begin{aligned}16u^4+8u^2+13 &= 16\left[(u-u_1)(u-u_2)\right]\left[(u-u_3)(u-u_4)\right]\\&=\left[4(u-u_1)(u-u_2)\right]\left[4(u-u_3)(u-u_4)\right]\end{aligned}$$

em que u_k, $k=1,2,3,4$ são as raízes

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{-1+i\sqrt{12}}, \quad u_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{-1+i\sqrt{12}} \\ u_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{-1-i\sqrt{12}}, \quad u_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-1-i\sqrt{12}} \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} 4(u-u_1)(u-u_2) &= 4u^2 - 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13} \\ 4(u-u_3)(u-u_4) &= 4u^2 + 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13} \end{aligned}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} 16u^4 + 8u^2 + 13 &= (4u^2 - 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}) \\ &\quad \times (4u^2 + 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}) \end{aligned}$$

pelo que podemos desenvolver o integrando em fracções parciais

$$\begin{aligned} \frac{1}{16u^4+8u^2+13} &= \frac{1}{4u^2 - 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} \\ &\quad \times \frac{1}{4u^2 + 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} \\ &= -\frac{1}{312}\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}(\sqrt{13}+13)u - 12\sqrt{13}}{4u^2 - 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} \\ &\quad + \frac{1}{312}\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}(\sqrt{13}+13)u + 12\sqrt{13}}{4u^2 + 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} J = &-\frac{2\pi}{39}\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}(\sqrt{13}+13)u - 12\sqrt{13}}{4u^2 - 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} du \\ &+ \frac{2\pi}{39}\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}(\sqrt{13}+13)u - 12\sqrt{13}}{4u^2 + 2\sqrt{-2+2\sqrt{13}}u + \sqrt{13}} du \end{aligned} \tag{4}$$

Desta maneira a determinação de J reduz-se à de dois integrais de funções racionais da forma (ver a entrada "List of integrals of rational functions" da Wikipedia)

$$\int_0^{1/2} \frac{mu+n}{au^2+bu+c} = \frac{m}{2a}\ln\left|au^2+bu+c\right| + \frac{2an-2bn}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2au+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\Bigg|_0^{1/2}$$

em que

$$4ac - b^2 = 4 \times 4 \times \sqrt{13} - (2\sqrt{-2+2\sqrt{13}})^2 = 8\sqrt{13+8} > 0$$

Obtive

$$\begin{aligned} I = \frac{J}{2} &= \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{13}}(\sqrt{13}+13)\pi}{312} \ln \frac{1+\sqrt{-2+2\sqrt{13}}+\sqrt{13}}{1-\sqrt{-2+2\sqrt{13}}+\sqrt{13}} \\ &- \frac{2(-2+2\sqrt{13})(\sqrt{13}+13)\pi}{312\sqrt{2+2\sqrt{13}}} \arctan \frac{12}{\sqrt{2+2\sqrt{13}}(-7+\sqrt{13})} \\ &\approx 0,90952 \end{aligned} \tag{5}$$

Américo Tavares
math.stackexchange.com/users/752
problemasteoremas.wordpress.com